

# 問題の解き方と答案のつくり方

## 問題まとめ PDF

林 俊介

2022年9月25日

表 1: 本講座で扱う問題の一覧

回数	分野	問題番号	大学・年度
第 1 回	集合と論理, 式と証明	1A	京都大学 2016 年 文系 第 5 問
		1B	東京大学 2015 年 文系 第 1 問
第 2 回	二次関数	2A	東京大学 2004 年 文系 第 2 問
		2B	京都大学 1993 年 文系 第 1 問
第 3 回	三角比, 三角関数	3A	東京大学 2006 年 文系 第 1 問
		3B	京都大学 2012 年 文系 第 5 問
第 4 回	指数関数・対数関数	4A	東京大学 1994 年 文系 第 1 問
		4B	京都大学 2011 年 文系 第 5 問
第 5 回	場合の数, 確率	5A	東京大学 2020 年 文系 第 2 問
		5B	京都大学 1995 年 文系 第 5 問
第 6 回	整数, 数列	6A	京都大学 2000 年 文系 第 4 問
		6B	東京大学 1991 年 理系 第 5 問
第 7 回	整式の微積分	7A	京都大学 1997 年 文系 第 4 問
		7B	東京大学 1992 年 文系 第 2 問
第 8 回	図形の性質, 図形と方程式, ベクトル	8A	京都大学 2000 年 文系 第 3 問
		8B	東京大学 2008 年 文系 第 3 問

問題は次のページ以降に掲載してあります。

## 第 1 回 集合と論理, 式と証明

### 問題 1A

実数を係数とする 3 次式  $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$  に対し, 次の条件を考える。

(イ) 方程式  $f(x) = 0$  の解であるすべての複素数  $\alpha$  に対し,  $\alpha^3$  もまた  $f(x) = 0$  の解である。

(ロ) 方程式  $f(x) = 0$  は虚数解を少なくとも 1 つもつ。

この 2 つの条件 (イ), (ロ) を同時に満たす 3 次式をすべて求めよ。

京都大学 2016 年 文系 第 5 問

### 問題 1B

以下の命題 A, B それぞれに対し, その真偽を述べよ。また, 真ならばその証明を与え, 偽ならば反例を与えよ。

命題 A  $n$  が正の整数ならば,  $\frac{n^3}{26} + 100 \geq n^2$  が成り立つ。

命題 B 整数  $n, m, l$  が  $5n + 5m + 3l = 1$  をみたすならば,  
 $10nm + 3ml + 3nl < 0$  が成り立つ。

東京大学 2015 年 文系 第 1 問

## 第 2 回 二次関数

### 問題 2A

$a$  を正の実数とする。次の 2 つの不等式を同時にみたす点  $(x, y)$  全体からなる領域を  $D$  とする。

$$y \geq x^2$$

$$y \leq -2x^2 + 3ax + 6a^2$$

領域  $D$  における  $x + y$  の最大値, 最小値を求めよ。

東京大学 2004 年 文系 第 2 問

### 問題 2B

実数  $a, b$  に対し, 関数  $f(x)$  を次のように与える。

$$f(x) = \cos 2x + 4a \cos x + b$$

すべての  $x$  に対して不等式  $-6 \leq f(x) \leq 6$  が成立するような点  $(a, b)$  の範囲を図示せよ。

京都大学 1993 年 文系 第 1 問

### 第3回 三角比, 三角関数

#### 問題 3A

四角形 ABCD が, 半径  $\frac{65}{8}$  の円に内接している。この四角形の周の長さが 44 で, 辺 BC と辺 CD の長さがいずれも 13 であるとき, 残りの 2 辺 AB と DA の長さを求めよ。

東京大学 2006 年 文系 第 1 問

#### 問題 3B

次の条件 (\*) を満たす正の実数の組  $(a, b)$  の範囲を求め, 座標平面上に図示せよ。

(\*)  $\cos a\theta = \cos b\theta$  かつ  $0 < \theta \leq \pi$  となる  $\theta$  がちょうど 1 つある。

京都大学 2012 年 文系 第 5 問

## 第4回 指数関数・対数関数

### 問題 4A

$xy$  平面上で、次の条件をみたす点  $(x, y)$  の範囲を  $D$  とする。

$$\log_2 x \leq 2 + \log_2 y \leq \log_2 x + \log_2(4 - 2x)$$

- (1)  $D$  を  $xy$  平面上に図示せよ。
- (2)  $s < 1$  のとき、 $y - sx$  の  $D$  上での最大値  $f(s)$  を求め、関数  $t = f(s)$  のグラフを  $st$  平面上に図示せよ。

東京大学 1994 年 文系 第1問

### 問題 4B

0 以上の整数を 10 進法で表すとき、次の問いに答えよ。ただし、0 は 0 桁の数と考えることにする。また  $n$  は正の整数とする。

- (1) 各桁の数が 1 または 2 である  $n$  桁の整数を考える。それらすべての整数の総和を  $T_n$  とする。 $T_n$  を  $n$  を用いて表せ。
- (2) 各桁の数が 0, 1, 2 のいずれかである  $n$  桁以下の整数を考える。それらすべての整数の総和を  $S_n$  とする。 $S_n$  が  $T_n$  の 15 倍以上になるのは、 $n$  がいくつ以上のときか。必要であれば、 $0.301 < \log_{10} 2 < 0.302$  および  $0.477 < \log_{10} 3 < 0.478$  を用いてもよい。

京都大学 2011 年 文系 第5問

## 第5回 場合の数, 確率

### 問題 5A

座標平面上に 8 本の直線

$$x = a \quad (a = 1, 2, 3, 4), \quad y = b \quad (b = 1, 2, 3, 4)$$

がある。以下, 16 個の点

$$(a, b) \quad (a = 1, 2, 3, 4, \quad b = 1, 2, 3, 4)$$

から異なる 5 個の点を選ぶことを考える。

(1) 次の条件を満たす 5 個の点の選び方は何通りあるか。

上の 8 本の直線のうち, 選んだ点を 1 個も含まないものがちょうど 2 本ある。

(2) 次の条件を満たす 5 個の点の選び方は何通りあるか。

上の 8 本の直線は, いずれも選んだ点を少なくとも 1 個含む。

東京大学 2020 年 文系 第 2 問

### 問題 5B

1 番から 7 番までの番号のついた席が番号順に一直列に並んでいる。客が順に到着して次のように着席していくとする。

(イ) 両端の席および先客が着席している隣の席に次の客が着席する確率は, すべて等しい。

(ロ) 両端が空席の席に着席する確率は, 隣の席にすでに先客が着席している席または端の席に着席する確率に比べて 2 倍である。

このとき,

(1) 3 人目の客が到着したときに, すでに 1 番と 3 番の席に先客が着席している確率を求めよ。

(2) 4 人目の客が到着したときに, すでに 2 番, 4 番, 6 番の席に先客が着席している確率を求めよ。

京都大学 1995 年 文系 第 5 問, 理系 第 5 問

## 第6回 整数, 数列

### 問題 6A

三角形 ABC において辺 BC, CA, AB の長さをそれぞれ  $a, b, c$  とする。この三角形 ABC は次の条件 (イ), (ロ), (ハ) を満たすとする。

(イ) ともに 2 以上である自然数  $p$  と  $q$  が存在して  $a = p + q, \quad b = pq + p,$   
 $c = pq + 1$  となる。

(ロ) 自然数  $n$  が存在して,  $a, b, c$  のいずれかは  $2^n$  である。

(ハ)  $\angle A, \angle B, \angle C$  のいずれかは  $60^\circ$  である。

このとき次の問に答えよ。

- (1)  $\angle A, \angle B, \angle C$  を大きさの順に並べよ。
- (2)  $a, b, c$  を求めよ。

京都大学 2000 年 文系 第 4 問

### 問題 6B

$xy$  平面上,  $x$  座標,  $y$  座標がともに整数であるような点  $(m, n)$  を格子点とよぶ。各格子点を中心として半径  $r$  の円がえがかれており, 傾き  $\frac{2}{5}$  の任意の直線はこれらの円のどれかと共有点をもつという。このような性質をもつ実数  $r$  の最小値を求めよ。

東京大学 1991 年 理系 第 5 問

## 第7回 整式の微積分

### 問題 7A

2 次関数  $y = (ax + b)^2$  ( $0 \leq x \leq 1$ ) の最大値を  $M(a, b)$  とする。このとき、次の不等式 (\*) が任意の実数  $a, b$  に対して成り立つような実数  $m$  の中で最小のものを求めよ。

$$(*) \quad M(a, b) \leq m \int_0^1 (ax + b)^2 dx$$

京都大学 1997 年 文系 第 4 問

### 問題 7B

甲、乙二人が出資して共同事業を行う。二人の出資合計を  $s$  とするとき、この事業による利潤  $f(s)$  は

$$f(s) = \begin{cases} \frac{1}{4}s(s-3)^2 & (0 \leq s \leq 2) \\ -\frac{3}{4}s + 2 & (s > 2) \end{cases}$$

で与えられ、利潤は出資額に応じて甲、乙に比例配分されるものとする。

甲の出資額  $a$  が一定であるとして、乙の利潤配分額を最大にする  $s$  の値を求めよ。ただし  $0 \leq a \leq 2$  とする。

東京大学 1992 年 文系 第 2 問

## 第8回 図形の性質, 図形と方程式, ベクトル

### 問題 8A

$\vec{a} = (1, 0, 0)$ ,  $\vec{b} = (\cos 60^\circ, \sin 60^\circ, 0)$  とする。

- (1) 長さ 1 の空間ベクトル  $\vec{c}$  に対し  $\cos \alpha = \vec{a} \cdot \vec{c}$ ,  $\cos \beta = \vec{b} \cdot \vec{c}$  とおく。このとき次の不等式 (\*) が成り立つことを示せ。

$$(*) \quad \cos^2 \alpha - \cos \alpha \cos \beta + \cos^2 \beta \leq \frac{3}{4}$$

- (2) 不等式 (\*) を満たす  $(\alpha, \beta)$  ( $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$ ,  $0^\circ \leq \beta \leq 180^\circ$ ) の範囲を図示せよ。

京都大学 2000 年 文系 第3問

### 問題 8B

座標平面上の 3 点  $A(1, 0)$ ,  $B(-1, 0)$ ,  $C(0, -1)$  に対し,

$$\angle APC = \angle BPC$$

をみたす点  $P$  の軌跡を求めよ。ただし  $P \neq A, B, C$  とする。

東京大学 2008 年 文系 第3問

以上